

به نام خدا

ریاضی گسسته

۱- گزاره زیر را به روش بازگشتی (گرماره های هم ارز) ثابت کنید.

$$\geq \text{ برای هر دو عدد حقیقی } x, y \text{ داریم } y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1);$$

$$\text{حل } y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (x + y)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است}$$

۲- اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و در عدد $(5m + 4), (6m + 5)$ بر a بخش پذیر

باشند ثابت کنید $a \mid \pm 1$

$$\begin{aligned} a \mid 6(5m + 4) \\ a \mid 5(m + 5) &\Rightarrow a \mid 5(6m + 5) - 6(5m + 4) \Rightarrow \text{حل} \\ a \mid 1 &\Rightarrow \pm 1 \end{aligned}$$

۳- معادله مشتقی $4x \equiv 10$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن را

بدست آورید.

$$4x \equiv 10 \Rightarrow 4x \equiv 4 \Rightarrow x \equiv 1 \Rightarrow x = 3k + 1$$

چون $(12, 8) \mid 20$ معادله جواب دارد

۴- اگر a, b عددی صحیح و فرد باشد در این صورت باقیمانده تقسیم $a^2 + b^2 +$

(5) برابر ۸ بیاید.

حل: مربع هر عدد فرد به صورت $8k + 1$ باشد

$$a^2 = 8k + 1$$

$$b^2 = 8k' + 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + g = 8k + 1 + 8k' + 5 \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 + 5 = 8k'' + 7 \Rightarrow r = 7$$

۵- چند عضو مجموعه $S = \{n \in N | 1 \leq n \leq 630\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیرند

پذیرند

$$\overline{|A \cup B|} = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|:$$

$$|S| = 630, |A| = 210, |B| = 126, |A \cap B| = 42 \Rightarrow \overline{|A \cup B|} = 336$$

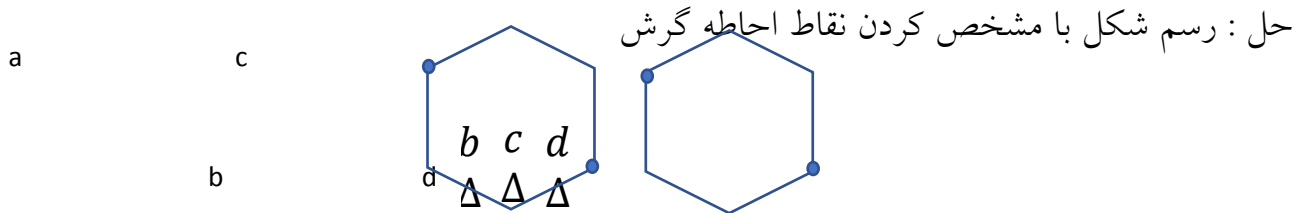
۶- هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ انتخاب می کنیم ثابت کنید حداقل دو نقطه

وجود دارد که فاصله آن ها کمتر از $\sqrt{8}$ است .

حل: ابتدا مستطیل مورد نظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می کنیم و هر قسمت را یک لانه فرض می کنیم و هفت نقطه را هفت کبوتر در نظر می گیریم طبق اصل لانه کبوتری دست کم یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است .

$$(AB)^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 < 2^2 + 2^2 \Rightarrow AB^2 = 8 \Rightarrow AB < \sqrt{8}$$

۷- یک گراف ۲- منتظم ۱۲ راس بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد .



۸- می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل قرار دهیم اگر بخواهیم هرنفر روبروی برادرش بنشیند این کار به چند روش می توان انجام داد؟

$$\text{حل: } 4! \times 2! = 384$$

۹- اگر $p \neq r$, p, r هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p, r) = 1$

حل : برهان خلف : گوئیم $(p, r) = d$, $d \neq 1$ باشد بنابراین

$$\text{تناقض } d|p \wedge d|r \xRightarrow{d \neq 1} d = p \wedge d = r \Rightarrow p = r$$

۱۰- اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد باقی

مانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید

$$\text{حل: } a = 7k + g \xrightarrow{\times 8} 8a = 56k + 40$$

$$a = 8k' + 7 \xrightarrow{\times 7} 7a = 56k' + 49$$

$$a = 56k - 56k' - 9$$

$$\xrightarrow{-9=-56+47} a = 56k - 56k' + 47$$

$$\Rightarrow a = 56 \underbrace{(k - k' - 1)}_r + 47 \Rightarrow r = 47$$